

## 18 X 10 12 r. ĆWICZENIA

Udowodnić, że:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$$

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C \quad \underline{\text{cnn}} \end{aligned}$$

Udowodnić, że:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= ((A \cup B) \cap A) \cup ((A \cup B) \cap C) = \\ &= A \cup ((C \cap A) \cup (C \cap B)) = (A \cup (C \cap A) \cup (C \cap B)) = \\ &= A \cup (B \cap C) \quad \underline{\text{cnn}} \end{aligned}$$

Udowodnij, że zbiór  $A \cup B$  jest najmniejszym zbiorem zawierającym jednocześnie zbiór  $A$  i zbiór  $B$ , t.j. takim zbiorem, że  $\forall_x (A \subseteq x \wedge B \subseteq x \Rightarrow A \cup B \subseteq x)$

Metoda „nie wprost”

hipoteza: twierdzenie jest nieprawdziwe

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$Z \wedge \sim T$

Jeśli dojdziemy do sprzeczności, to wyniki wnioskowania są poprawne z założeniem



hip:  $\exists x A \subseteq X \wedge B \subseteq X \wedge (A \cup B) \not\subseteq X$   
 $\exists x \in (A \cup B) x \in X \wedge (\exists x \notin X \vee \exists x \in X)$  sprzeczności i założeniom (hipoteza)

Udowodnić, że jeżeli

$$\langle x, y \rangle \equiv \langle x', y' \rangle$$

$x = y \iff \langle x, y \rangle : x \in X \wedge y \in Y$  - iloczyn kartezjański

$$\langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle \iff x = z \wedge y = w$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff \langle z, w \rangle = \langle z', w' \rangle \iff \begin{aligned} 1^\circ) & x = z' \wedge y = w' \iff x = z \wedge y = w \text{ cum} \\ 2^\circ) & x' = z' \wedge y' = w' \iff x = z \wedge y = w \end{aligned}$$

$$\iff \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle \text{ cum}$$

## RELACJE

$$R \subseteq X \times X$$

$$R \subseteq X^2$$

$$R \subseteq \mathbb{N}^2$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad x R y \iff 2 \mid (x + y)$$

$$\forall x \in X \quad x R x$$

$$\forall x, y \in X \quad x R y \iff y R x$$

$$\forall x, y, z \in X \quad x R y \wedge y R z \iff x R z$$

$$[X]_R = \{y \in X : x R y\}$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x R x \iff 2 \mid (x + x)$$

$$x R x \iff 2 \mid 2x$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad 2 \mid (x + y) \iff 2 \mid (y + x)$$

$x + y = y + x$  - dodawanie jest przemienne w zbiorze liczb naturalnych

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} \quad x R y \wedge y R z \iff x R z$$

$$2 \mid (x + y) \wedge 2 \mid (y + z) \iff 2 \mid (x + z)$$

$$(x + y) = 2e$$

$$(y + z) = 2k \quad k, e \in \mathbb{N}$$

$$x + y + y + z = 2(e + k)$$

$$x + 2y + z = 2(e + k)$$

$$x + z = 2(e + k - y)$$

$$[X]_R = \{y : x R y\} - \text{klasa abstrakcji} \quad \forall x, y \in \mathbb{N} \quad x R y \iff 2 \mid (x + y)$$

$$[1]_R = \{y \in \mathbb{N} : 2 \mid (1 + y)\}$$

$$[1]_R = 2\mathbb{N} + 1$$

$$[2p + 1]_R = 2\mathbb{N} + 1$$

$$p \in \mathbb{N}$$

$$[2]_R = 2\mathbb{N}$$

$$[4]_R = 2\mathbb{N}$$

$$[2p]_R = 2\mathbb{N}$$

$$R \subseteq X^2$$

$[X]_R = [Y]_R \iff x R y$  2 klasy abstrakcji są sobie równe, gdy reprezentanci są ze sobą w relacji

$$\Rightarrow \{z : x R z\} = \{w : y R w\}$$

$$z = w$$

MO-CX, 15.11.2018

1) Wykazać, że relacja jest:

- zwrotna 1°
- symetryczna 2°
- przechodnia 3°

$$\forall x, y \in X \quad x R y \iff 2 \mid (x + y)$$

$$1^\circ \quad \forall x \in X \quad x R x \iff 2 \mid (x + x) \iff 2 \mid 2x$$

$$\forall x \in X \quad x R x \iff \forall x \in X \quad 2 \mid (x + x) \iff \forall x \in X \quad 2 \mid 2x$$

$$2^\circ \quad \forall x, y \in X \quad x R y \iff y R x$$

$$\forall x, y \in X \quad 2 \mid (x + y) \iff \forall x, y \in X \quad 2 \mid (y + x) \iff y R x$$

$$3^\circ \quad \forall x, y, z \in X \quad x R y \wedge y R z \iff x R z$$

$$\forall x, y, z \in X \quad 2 \mid (x + y) \wedge 2 \mid (y + z) \iff \exists m, n \in \mathbb{N} \quad x + y = 2m \wedge y + z = 2n \iff \exists m, n \in \mathbb{N} \quad x + z = 2(m + n - y)$$



klasa abstrakcji

$$R \subseteq X^2$$

klasa abstrakcji w relacji R o reprezentancie X

$$[X]_R = \{y \in X : yRx\}$$

Wszystkie elementy X będące w relacji z x

Każda relacja równoważności wprowadza podział relacji, którego elementami są klasy abstrakcji.

$$X = \{x_i : i=1, \dots, n\}$$

$$\forall x, y \in X \quad xRy \Leftrightarrow \exists i \in 1, \dots, n \quad x \in H_i \wedge y \in H_i$$

$$xRx \Leftrightarrow \exists i \in 1, \dots, n \quad x \in H_i \wedge x \in H_i$$

$$\Downarrow$$

$$x \in H_i$$

$$xRy \Rightarrow \exists i \in 1, \dots, n \quad x \in H_i \wedge y \in H_i$$

$$\exists i \in 1, \dots, n \quad y \in H_i \wedge x \in H_i \Rightarrow yRx$$

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow \exists i \exists j \quad x \in H_i \wedge y \in H_i \wedge y \in H_j \wedge z \in H_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in H_i \wedge y \in H_i \wedge z \in H_i$$

$$x \in H_i \wedge z \in H_i$$

Relacje  $R_1$  i  $R_2$  są równoważne

$$R_1 \subseteq X_1^2, R_2 \subseteq X_2^2 \quad X_1, X_2$$

$$S \subseteq (X_1 \times X_2)^2$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle S \langle y_1, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 R_1 y_1 \wedge x_2 R_2 y_2$$

$$[\langle x_1, x_2 \rangle]_S$$

W relacji S są uporządkowane pary

$$[\langle x_1, x_2 \rangle]_S = \{ \langle y_1, y_2 \rangle : \langle x_1, x_2 \rangle S \langle y_1, y_2 \rangle \} =$$

$$= \{ \langle y_1, y_2 \rangle : x_1 R_1 y_1 \wedge x_2 R_2 y_2 \} =$$

$$= \{ \langle y_1, y_2 \rangle \in [x_1]_{R_1} \times [x_2]_{R_2} \}$$

$$y_1 \in [x_1]_{R_1} \wedge y_2 \in [x_2]_{R_2}$$

$$[\langle x_1, x_2 \rangle]_S = [x_1]_{R_1} \times [x_2]_{R_2}$$

Wniosek: na klasie abstrakcji o danym reprezentancie czy są relacje równoważności?

W dowodzie:

- 1)  $x \in [x]_R$
- 2)  $[x]_R \subseteq [x]_R \Leftrightarrow x R x$
- 3)  $[x]_R \cap [x]_R \subseteq [x]_R \Leftrightarrow x R x$

## LOGIKA

### REGUŁY WNIOSKOWANIA

1) odnegowanie koniunkcji

$$\frac{p \wedge q}{p}, \frac{p \wedge q}{q}$$

2) dążenie alternatywy

$$\frac{p}{p \vee q}, \frac{q}{p \vee q}$$

3) opuszczanie alternatywy

$$\frac{p \vee q, \sim p}{q}, \frac{p \vee q, \sim q}{p}$$

4) modus ponens

$$\frac{p \Rightarrow q, p}{q}$$

$$\frac{\sim p \Rightarrow q, \sim q}{p}$$

$$\frac{\sim p \Rightarrow q, \sim q}{p}$$

$$\frac{p \Rightarrow q, \sim q}{\sim p}$$

$$p \Rightarrow q$$

$$\Downarrow$$

$$\sim p \vee q$$

$$p \Rightarrow q$$

$$p \Rightarrow \sim q$$

$$\sim p$$

DOWÓD

WPROST

$$1) p \Rightarrow q$$

$$2) p \Rightarrow \sim q$$

$$3) (1) \sim p \vee q$$

$$4) (2) \sim p \vee \sim q$$

$$5) (3, 4) (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

$$6) (5) \sim p \vee (q \wedge \sim q)$$

$$7) (6) p$$

NIE-WPROST

$$1) p \Rightarrow q$$

$$2) p \Rightarrow \sim q$$

$$3) \sim(\sim p)$$

$$4) (1) \sim p \vee q$$

$$5) (2) \sim p \vee \sim q$$

$$6) (3) p$$

$$7) (6, 4) q$$

$$8) (6, 5) \sim q$$

$$9) (7, 8) \square$$
 - sprzeczność

Dowód nie-wprost  $\rightarrow$  o d formułę więcej

4. Usunąć implikację

2. Zamienić alternatywy na koniunkcje

5. Negacje zamienić na nie-negacje

Przeprowadzić dowód formalny.

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

$$\sim r \Rightarrow p$$

Dowód nie-wprost

$$1) (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

$$2) \sim(\sim r \Rightarrow p)$$

$$3) (2) \sim(r \vee p)$$

$$4) (3) \sim r \wedge \sim p$$

$$5) (4) \sim r$$

$$6) (4) \sim p$$

$$7) (1) \sim(\sim p \vee q) \vee r$$

$$8) (7) (p \wedge \sim q) \vee r$$

$$9) (7, 1) p \wedge \sim q$$

$$10) (8) p$$

$$11) (10, 6) \square$$



$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)] \Rightarrow \neg p$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 \Rightarrow q & 1 \Rightarrow \neg q \\ q=1 & q=0 \end{matrix}$$

$p=1 \wedge q=1 \wedge q=0$  - nie ma wartościowania, dla którego coś będzie równe 0.

jeśli to zdanie jest tautologią, to reguła wniosku-  
wania jest poprawna

Sprawdzić przez sprzeczność:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q]$$

$$\begin{matrix} p=1 & p=1 & r=1 & q=1 \\ p=1 & & & \\ p=0 & p=1 & & \end{matrix}$$

$p=1 \wedge p=0 \wedge q=1 \wedge r=0$  - sprzeczność

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)] \Rightarrow \neg p$$

$$\neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \Rightarrow \neg p$$

$$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee \neg p$$

$$p \wedge (\neg q \vee q) \vee \neg p$$

1  
równie wartość 1

można odjąć  
niechwilnie  
predykatów

MD-Lab, 16.11.2012

Amzi [www.amzi.com](http://www.amzi.com)

linux: student/lab

wieśta1...

Application/System Tools/VM Ware Player  
md/labmd

- 1) nowa predykatu: pisana małą literą
- 2) zmienne pisane z wielkiej litery albo od znaku podkreślenia
- 3) implikacja  $\leftarrow$  zostawiona przez :-
- 4) wywnioś (fakty, reguły) kończymy znakiem .

? bog(zeus).  $\rightarrow$  czy wartość pierwszego argumentu gdy przyjmie wartość zeus, to predykat "bog" będzie prawdziwy? (czy zeus to bog)

?\_ bog(zeus)  $\rightarrow$  dla jakiej wartości zmiennej zeus będzie prawdziwy?

zeus = hera

knopie = średnia - powrót  
= koniec generacja drzewa  
wyszystniego dowodowego kolejny rozr.

zeus = zeus;

no  $\rightarrow$  braki nowizganie  
w danej części drzewa  
dowodowego

?\_ bog(-).  $\rightarrow$  czy istnieje jakikolwiek bog?

gdy formuła pusta - no  
gdy jest bog w bazie - yes

?\_ ojciec(zeus, -).  $\rightarrow$  czy zeus jest jakimkolwiek ojcem?  
?\_ ojciec(-, -).  $\rightarrow$  czy istnieje jakikolwiek ojciec?  
 $\rightarrow$  predykaty dwuargumentowe

SILNIA (rekurencyjnie)

silnia(N, X)  
wł - wyj

silnia(0, 1).  $\rightarrow$  warunek brzegowy

silnia(N, X) :- N > 0, M is N-1, silnia(M, Y), X is Y\*N.

warunek  
stopu

?\_ silnia(2, X)

X=2 - koniec, gdy postawimy średnią nową silnia-  
my, coś jak wyliczanie kodu po funkcji  
return w C)

stack overflow  $\rightarrow$  przepełnienie stosu, wpadnięcie  
w nieskończoną rekurencję

majpierw fakty, potem proste reguły, potem zaawansowa-  
ne

Program sprawdzający, czy liczba jest cyfrą

cyfra(0).

cyfra(N) :- N < 10, M is N-1, cyfra(M)

liczymy wszystkie cyfry

// cyfra(X), fail

cyfra 2(X) :- cyfra(X), fail  $\rightarrow$  z prawdy tworzymy  
fałsz, bo wtedy wartości  
zostaną wypisane

?\_ cyfra(X)

no

cyfra 2(X) :- cyfra(X), write(X), nl, fail

Prolog dysponuje listą, natomiast ja na element i resztę

[ ]

[H]

[H.T]

silnie i Fibonacci - Napisać

1. Sprawdzenie, czy 1. lista jest podzielona na drugiej
2. 3 predykaty (2 wykorzystuje 1, 3 wykorzystuje 2.)

1) średnia

2) wariancja

3) odchylenie standardowe



MO - 29.11.2022

# SYSTEM INFORMACYJNY

$A = \{0, 1\}$  - zbiór arytmetyczny

	a	b	c
1	0	0	1
2	1	0	1
3	1	0	2
4	0	0	1
5	2	0	1

arytmetyk b. może usunąć (zredukować), bo nie wchodzi on w grę - jest nieaktualny (jeśli jest powtórzeniem innego atrybutu, ten można go usunąć)

## MACIERZ ODRÓŻNIALNOŚCI

	1	2	3	4	5
1	∅	a	a, c	∅	a
2	a	∅	c	a	a
3	a	c	∅	a, c	a, c
4	∅	a	a, c	∅	a
5	a	a	a, c	a	∅

Wspieramy, czyli nie różnią od siebie poszczególne elementy

$$f_1 = a \wedge (a \vee c) = a$$

$$f_2 = a \wedge c$$

$$f_3 = a \wedge (a \vee c) = c$$

$$f_4 = a \wedge (a \vee c) = a$$

$$f_5 = a \wedge (a \vee c) = a$$

$$F = a \wedge c$$

Dana jest funkcja f. Wyznaczyć implikanty i implikanty proste tej funkcji

$$f = a(b+c)(c+d)(d+a)$$

$$f = a(b+c)(c+d)(d+a) = (ab+ac)(c+d)(d+a)$$

$$= (abc + acd + abd + ac^2)(d+a) = abc + acd + abd + ac^2 + abc + acd + abd + ac^2$$

$$= abd + ac$$

$$BX = \{x \in U : [x]_{\text{ind}_B} \subseteq X\}$$

$$\overline{BX} = \{x \in U : [x]_{\text{ind}_B} \cap X \neq \emptyset\}$$

Udowodnić, że:

$$\overline{B(X \cup Y)} = \overline{BX} \cup \overline{BY}$$

$$\{x \in U : [x]_{\text{ind}_B} \cap (X \cup Y) \neq \emptyset\} = P$$

$$\{x \in U : [x]_{\text{ind}_B} \cap X \neq \emptyset \vee [x]_{\text{ind}_B} \cap Y \neq \emptyset\} = \{x \in U : [x]_{\text{ind}_B} \cap (X \cup Y) \neq \emptyset\} = L$$

$$L = P \quad \text{cnn}$$

	a	b	c
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	2	1
4	2	0	2
5	1	1	0
6	2	0	1

	1	2	3	4	5	6
1	∅	b, c	a, b, c	a, c	a, b	a, c
2	b, c	∅	a, b	a, b, c	a, c	a, b
3	a, b, c	a, b	∅	a, b, c	b, c	a, b
4	a, c	a, b, c	a, b, c	∅	a, b, c	c
5	a, b	a, c	b, c	a, b, c	∅	a, b, c
6	a, c	a, b	a, b	c	a, b, c	∅

$$f_1 = (b \vee c) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (a \vee c) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b})$$

$$f_2 = (b \vee c) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (a \vee c) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})$$

$$f_3 = (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (b \vee c)$$

$$f_4 = (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (a \vee c) \wedge c$$

$$f_5 = (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

$$f_6 = (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{c}) \wedge c$$

2 moduły 2-elementowe, można wziąć a lub b, ale c nie można nam wziąć.

Wskazać c spowoduje utratę informacji.

## TABLICA DECYZYJNA

$DT = \langle U, A \cup \{d\} \rangle$

redukt relacyjny dla atrybutu relacji relacyjny dla tabeli

	a	b	d
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	2	1
4	2	0	2
5	1	1	0
6	2	0	1

dobry decyzyjny + składowe atrybuty z tych samych wartości atrybutu decyzyjnego

$$X_0 = \{1, 5\}$$

$$X_1 = \{2, 3, 6\}$$

$$X_2 = \{4\}$$

∅ w modelu mod d dla atrybutu: a tym samym atrybutu decyzyjnego

Sposób porównywania tabeli, aby jest to macierz reduktu, nie uwzględniamy atrybutu decyzyjnego

	1	2	3	4	5	6
1	∅	b	a, b	a	∅	a
2	b	∅	∅	a, b	a	∅
3	a, b	∅	∅	a, b	b	∅
4	a	a, b	a, b	∅	a, b	∅
5	∅	a	b	a, b	∅	a, b
6	a	∅	∅	∅	a, b	∅

$$f_1 = a \wedge b \wedge (a \vee b) = ab$$

$$f_2 = a \wedge b \wedge (a \vee b) = ab$$

$$f_3 = b \wedge (a \vee b) = b$$

$$f_4 = a \wedge (a \vee b) = a$$

$$f_5 = a \wedge b \wedge (a \vee b) = ab$$

$$f_6 = a \wedge (a \vee b) = a$$

$$F = ab$$

$$(a+b) \cdot a = a + ab = a$$



$U = \{a, b\} = \{ \overset{B_1}{1}, \overset{B_2}{2}, \overset{B_3}{3}, \overset{B_4}{4}, \overset{B_5}{5} \}$

$$X_d = UB_i$$

$$X_0 = B_1 \cup B_5$$

$$BX_1 = B_2 \cup B_3$$

$$BX_2 = B_4 \cup B_5 \cup B_6$$

$$BX_3 = \emptyset$$

$$BX_4 = B_4$$

Jeżeli obiekt nie należy do górnego przybliżenia zbioru, to nie należy on do zbioru.

Jeżeli obiekt należy do dolnego przybliżenia zbioru, to należy do tego zbioru.

MD-4ab, 30.11.2012

reguły - symbole terminujące  
przejawy - symbole nieokreślone (jest nim, gdy spełnia predykat)

argument - definicja argumentu

cyfra (X) → "0",  $\{x \in 0\}$  ← ułożenie liter

litera (X) → cyfra (Y),  $\{x \in Y\}$  ← to, co ma, zmienia po literze

litera (X) → cyfra (Y), litera (Z),  $\{x \in Y \cup Z\}$  ← litera dla liter z cyframi

litera (X) → litera (Y), "a", litera (Z), "aaa, jak"

? litera (X) - NIE, NIE, NIE

? litera (X, "25", []).

X=25.

yes

litera A (X) → "a"

litera B (X) → "b"

litera C (X) → "c"

palindrom (X) → lit (Z).

palindrom (X) - lit A, palindrom

? palindrom (X, "abcba", []).

↑ wartość to zmiennej jest niepotrzebne

MD-4ab, 13.12.2012

① losowanie 6 kul z 10

P	K	# sposobów
N	N	210
N	T	151200
T	N	5005
T	T	10 <sup>6</sup>

↑ postać macierzy

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

↑ macierz

losowanie 10 kul z 6

P	K	# sposobów
N	N	0 ← 0 kul
N	T	0 ← postać macierzy
T	N	3003
T	T	6 <sup>10</sup>

$$C_{k=0}^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{10!}{0! \cdot 10!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

$$V_m^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 151200$$

$$\bar{C}_m^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{15!}{6! \cdot 9!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 13 \cdot 35 = 5005$$

$$V_n^k = 10^6$$

$$C_{10}^6 = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = \frac{11 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21 \cdot 11 \cdot 13 = 3003$$



3) Ile jest rozwiązań tego równania wśród liczb całkowitych:  $x_1 + x_2 + x_3 = 17$

- a)  $x_i \geq 0$   
 b)  $x_i \geq 1$   
 c)  $0 \leq x_1 \leq 3$   
 $0 \leq x_2 \leq 2$   
 $x_3 \geq 6$

a)  $x_1 = 0$   $x_2 + x_3 = 17$   
 $x_1 = 1$   $x_2 + x_3 = 16$   
 $\vdots$   
 $x_1 = 17$   $x_2 + x_3 = 0$

b)  $x_1 = 1$   $x_2 + x_3 = 16$   
 $x_1 = 2$   $x_2 + x_3 = 15$   
 $\vdots$   
 $x_1 = 15$   $x_2 = 1$   $x_3 = 1$

c)  $0 + 0 + 17 = 17$   
 $0 + 1 + 16 = 17$   
 $1 + 0 + 16 = 17$   
 $1 + 1 + 15 = 17$   
 $2 + 0 + 15 = 17$   
 $2 + 1 + 14 = 17$   
 $3 + 0 + 14 = 17$   
 $3 + 1 + 13 = 17$   
 $3 + 2 + 12 = 17$

3) 5 nieujemnych lub zerowych  $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}$ ,  $x_i \geq 0$ , a ich suma wynosi 100. Udowodnić, że wśród nich są co najmniej 3 takie, których suma wynosi co najmniej 60.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$$

$$100 - 40 = 60 \Rightarrow \text{liczba 60 dzieli się na 5 podzielników z reguła niefalshowa}$$

4) W ilu permutacjach słowa KANKAN iadne dwie sąsiadujące ze sobą litery nie są identyczne?

$$P = 90 - \text{permutacje z powtórzeniami (względnie możliwości)}$$

HD - dzień 10.04.2018r.

## FUNKCJA TWORZĄCA

Funkcja tworząca - każdy ciąg ma funkcję tworzącą:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - \text{wzrost jest niebieżna}$$

Pozwala nam to z jej pomocą i ciągu opisanego rekurencyjnie przejść do wzoru ogólnego tego ciągu.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_i = 2a_{i-1} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - \text{wzrostamy ze znajomości tego wzoru}$$

$$f(x) = 1 \cdot x^0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2a_{i-1} x^i = 1 + 2x \sum_{i=1}^{\infty} a_{i-1} x^{i-1} = 1 + 2x f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}$$

$$f(x) = 0$$

$$a_i = 2a_{i-1} + 2, \text{ wyznaczyć wzór ogólny tego ciągu}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (2a_{i-1} + 2) x^i = \sum_{i=1}^{\infty} 2a_{i-1} x^i + \sum_{i=0}^{\infty} 2x^i = 2x f(x) + \frac{2x}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow \text{to wzór}$$

$$f(x) = 2x f(x) + \frac{2x}{1-x}$$

$$f(x)(1-2x) = \frac{2x}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{2x}{(1-2x)(1-x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}$$

$$\begin{cases} 2x = A(1-x) + B(1-2x) \\ 2x = A - Ax + B - 2Bx \\ 2x = (A+B) - (A+2B)x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -A-2B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{1-2x} + \frac{2}{1-x}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$a_i = -a_{i-1} + 6a_{i-2}$$

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 1 + 2x + \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i = 1 + 2x + \sum_{i=2}^{\infty} (a_{i-1} + 6a_{i-2}) x^i =$$

$$= 1 + 2x + \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1} x^i + 6 \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} x^i = 1 + 2x + x \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1} x^{i-1} + 6x^2 \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} x^{i-2} = 1 + 2x + x(f(x) - a_0 x^0) + 6x^2 f(x)$$

$$f(x) = 1 + 2x + x(f(x) - 1) + 6x^2 f(x)$$

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x-6x^2}$$

$$\frac{1+x}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-2x}$$

$$f(x) = \frac{4x}{2+3x} = \frac{2x}{1+\frac{3}{2}x} = \sum_{i=0}^{\infty} 2x \left(-\frac{3}{2}\right)^i$$